Teorema di addizione per l'esponenziale complesso

Def. $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Tale serie converge assolutamente e quindi converge ($\forall z \in \mathbb{C}$).

Dalle seguenti relazioni:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

segue il

Teorema di addizione $\forall\, z,w \in \mathbb{C}$, $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.

Dimostriamo prima un risultato algebrico che segue dal binomio di Newton:

Lemma algebrico $\forall\, N \geq 1$, $\forall\, z,w \in \mathbb{C}$ si ha

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(z+w)^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} \frac{w^j}{j!}\right) - \varepsilon_N, \tag{3}$$

dove

$$\varepsilon_N := \varepsilon_N(z,w) := \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=N-k+1}^{N} \frac{z^k}{k!} \frac{w^j}{j!}.$$

Dim del lemma algebrico* Dalla formula del binomio di Newton,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{0 \le k \le n \le N} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=k}^{N} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!} \sum_{j=0}^{N-k} \frac{w^j}{j!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!} \left(\sum_{j=0}^{N} \frac{w^j}{j!} - \sum_{j=N-k+1}^{N} \frac{w^j}{j!} \right),$$

se $k=0$, $\sum_{j=N+1}^{N} \frac{w^j}{j!} = 0$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{w^j}{j!}\right) - \sum_{k=1}^{N} \frac{z^k}{k!} \sum_{j=N-k+1}^{N} \frac{w^j}{j!} = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{w^j}{j!}\right) - \varepsilon_N. \blacksquare$$

Dim del teorema di addizione Dalla definizione di $\varepsilon_N(z,w)$ segue che $|\varepsilon_N(z,w)| \le \varepsilon_N(|z|,|w|)$, $\forall\, z,w \in \mathbb{C}$. Da (2), da (1) e da (3) (con $z=x$, $w=y$) segue che $\varepsilon_N(x,y) \to 0$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$. Da queste osservazioni e da (3), si ha

$$\Bigg| \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{(z+w)^n}{n!} - \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{w^j}{j!}\right)}_{\downarrow N \to +\infty} \Bigg| \le |\varepsilon_N(z,w)| \le \varepsilon_N(|z|,|w|) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

$$|\exp(z+w) - \exp(z) \cdot \exp(w)|$$

Il teorema è dimostrato. $\blacksquare$